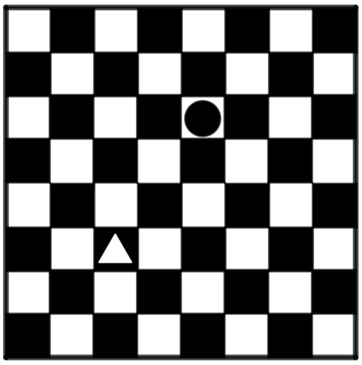
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

ENA – 2019 – GABARITO COM SOLUÇÕES – PROVA OBJETIVA

---

1. De quantas maneiras é possível posicionar duas peças (um triângulo branco e um círculo preto) sobre um tabuleiro 8×8 como o da figura se o triângulo branco só pode ocupar casas pretas, o círculo preto só pode ocupar casas brancas e as duas peças não podem ocupar casas adjacentes?



(A) 64 (B) 228 (C) 896 (D) 912 (E) 1024

Solução
Resposta: D

Há três formas de posicionar o triângulo branco: no canto, na borda ou no interior do tabuleiro.

Como o triângulo branco deve ocupar somente casas pretas, há apenas 2 formas de posicioná-lo no canto, restando apenas 30 das 32 casas brancas disponíveis para o círculo preto, visto que não poderá ser posicionado em nenhuma das duas casas brancas adjacentes àquela na qual se encontra o triângulo branco. Assim, pelo princípio multiplicativo, há $2 \times 30 = 60$ formas de arrumar o tabuleiro neste caso.

Caso optemos por posicionar o triângulo branco em uma das bordas do tabuleiro, somente 12 casas estarão disponíveis para ele, restando apenas 29 casas brancas disponíveis para o círculo preto, visto que não poderá ser posicionado em nenhuma das três casas brancas adjacentes àquela ocupada pelo triângulo branco. Assim, há $12 \times 29 = 348$ formas de arrumar o tabuleiro neste caso.

Se posicionarmos o triângulo branco no interior do tabuleiro, 18 casas estarão disponíveis para ele, restando apenas 28 casas brancas para o círculo preto, visto que não poderá ser posicionado em nenhuma das quatro casas brancas adjacentes àquela ocupada pelo triângulo branco. Assim, há $18 \times 28 = 504$ formas de arrumar o tabuleiro neste caso.

Como não há interseção entre os três casos antes citados, concluímos pelo princípio aditivo que há um total de $60 + 348 + 504 = 912$ formas de posicionar as duas peças sobre o tabuleiro.

---

2. Quantos números de três algarismos possuem pelo menos dois dígitos consecutivos iguais?

(A) 90 (B) 100 (C) 171 (D) 180 (E) 271

Solução
Resposta: C

Há apenas três casos a considerar:

(I) Os três dígitos são iguais;
(II) O primeiro dígito é diferente e os demais iguais;
(III) O último dígito é diferente dos demais, que são iguais.

No caso (I), há exatamente 9 possibilidades. No caso (II), há $9 \times 9 \times 1 = 81$ possibilidades, já o algarismo das centenas deve ser diferente de 0, o das dezenas pode ser qualquer dígito diferente do das centenas e o das unidades deve ser igual ao das dezenas. No caso (III), há $9 \times 1 \times 9 = 81$, pois o algarismo das centenas pode ser qualquer dígito diferente de 0, o das dezenas deve ser igual ao das centenas e o último dígito pode ser qualquer algarismo diferente dos anteriores, que são iguais.
Como não há interseções entre os três casos, o número total de casos é $9 + 81 + 81 = 171$.

3. Considere um trapézio cuja base maior mede a, a base menor mede b e cujos lados não paralelos medem c e d. Qual das combinações abaixo não é possível?

(A) $a = 3, b = 1, c = 2, d = 2.$

(B) $a = 4, b = 1, c = 2, d = 2.$

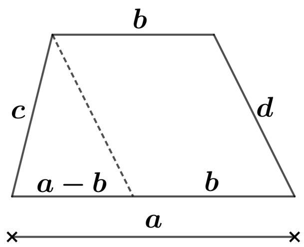
(C) $a = 4, b = 1, c = 1, d = 2.$

(D) $a = 4, b = 1, c = 4, d = 2.$

(E) $a = 4, b = 2, c = 2, d = 2.$

Solução
Resposta: C

Considere um trapézio $ABCD$ com os lados de medidas $\overline{AB} = a$, $\overline{CD} = b$, $\overline{AD} = c$ e $\overline{BC} = d$, como na figura abaixo. Trace o segmento DE, paralelo a BC, de forma a obter o paralelogramo $EBCD$. Com isso $\overline{DE} = d$.



Sabemos que o triângulo ABE existe se, e somente se, as seguintes desigualdades são satisfeitas:

$$a - b < c + d,\ d < a - b + c \text{ e } c < a - b + d.$$

Notando que $d = 2$ em todas as alternativas, as condições acima se reduzem a $a - b < c + 2$, $2 < (a - b) + c$ e $c < (a - b) + 2$.

Vamos testar cada uma das alternativas:

(A) Para $a = 3, b = 1, c = 2$, tem-se $a - b = 2$. Substituindo nas desigualdades acima, tem-se:

$$2 = a - b < c + 2 = 2 + 2 = 4 \text{ (Verdadeiro)}$$
$$2 < (a - b) + c = 2 + 2 = 4 \text{ (Verdadeiro)}$$
$$2 = c < (a - b) + 2 = 2 + 2 = 4 \text{ (Verdadeiro)}$$

(B) Para $a = 4, b = 1, c = 2$, tem-se $a - b = 3$. Substituindo nas desigualdades acima, tem-se:

$$3 = a - b < c + 2 = 2 + 2 = 4 \text{ (Verdadeiro)}$$
$$2 < (a - b) + c = 3 + 2 = 5 \text{ (Verdadeiro)}$$
$$2 = c < (a - b) + 2 = 3 + 2 = 5 \text{ (Verdadeiro)}$$

(C) Para $a = 4, b = 1, c = 1$, tem-se $a - b = 3$. Substituindo nas desigualdades acima, tem-se:

$$3 = a - b < c + 2 = 1 + 2 = 3 \text{ (FALSO)}$$
$$2 < (a - b) + c = 3 + 1 = 4 \text{ (Verdadeiro)}$$
$$1 = c < (a - b) + 2 = 3 + 2 = 5 \text{ (Verdadeiro)}$$

(D) Para $a = 4, b = 1, c = 4$, tem-se $a - b = 3$. Substituindo nas desigualdades acima, tem-se:

$$3 = a - b < c + 2 = 4 + 2 = 6 \text{ (Verdadeiro)}$$
$$2 < (a - b) + c = 3 + 4 = 7 \text{ (Verdadeiro)}$$
$$4 = c < (a - b) + 2 = 3 + 2 = 5 \text{ (Verdadeiro)}$$

(E) Para $a = 4, b = 2, c = 2$, tem-se $a - b = 2$. Substituindo nas desigualdades acima, tem-se:

$$2 = a - b < c + 2 = 2 + 2 = 4 \text{ (Verdadeiro)}$$
$$2 < (a - b) + c = 2 + 2 = 4 \text{ (Verdadeiro)}$$
$$2 = c < (a - b) + 2 = 2 + 2 = 4 \text{ (Verdadeiro)}$$

A única alternativa que não satisfaz às 3 condições é a (C).

4. Existem 12 pontos distintos sobre uma circunferência.

Quantos polígonos convexos inscritíveis podemos construir com esses pontos dados?

(A) 2014

(B) 3015

(C) 4017

(D) 5012

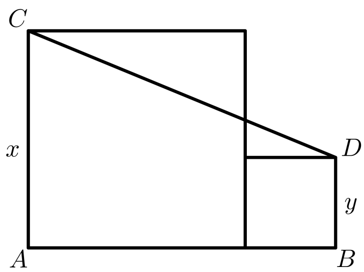
(E) 6015

Solução
Resposta: C

Basta calcular o número de subconjuntos de um conjunto com 12 elementos, retirando-se o conjunto vazio, os doze subconjuntos unitários e os 66 subconjuntos com 2 elementos ou seja, $2^{12} - 1 - 12 - 66 = 4017$.

---

5. Sobre um segmento AB são construídos dois quadrados adjacentes com lados de medidas x e y, conforme a figura. Podemos afirmar que a medida do segmento CD é dada, em função de x e y, por:



(A) $\sqrt{2(x^2+y^2)}$

(B) $(x+y)\sqrt{2}$

(C) $xy\sqrt{2}$

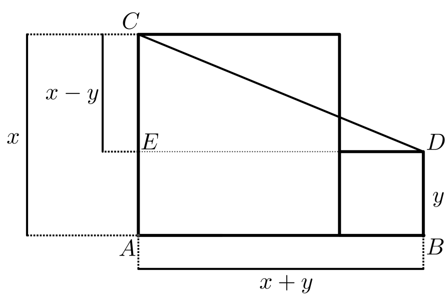
(D) $2(x^2+y^2)$

(E) $\dfrac{x^2+y^2}{2}$

Solução
Resposta: A

Prolongando o lado superior do quadrado menor até que intersecte o segmento AC no ponto E obtemos o triângulo retângulo CDE de hipotenusa CD e cujos catetos medem $x+y$ e $x-y$, como indicado na figura. Aplicando o teorema de Pitágoras descobrimos que a medida de CD é dada por

$$\sqrt{(x+y)^2+(x-y)^2} = \sqrt{x^2+2xy+y^2+x^2-2xy+y^2} = \sqrt{2x^2+2y^2} = \sqrt{2(x^2+y^2)}.$$



6. A base (lado distinto) de um triângulo isósceles mede 6 cm e a altura relativa a esta base mede 4 cm. Nele inscrevemos outro triângulo isósceles, com base paralela à base do triângulo original e o vértice oposto no ponto médio da base do triângulo original, de modo que a área do triângulo inscrito seja a maior possível. A área, em cm^2, do triângulo inscrito é igual a:

(A) $\frac{1}{2}$

(B) 2

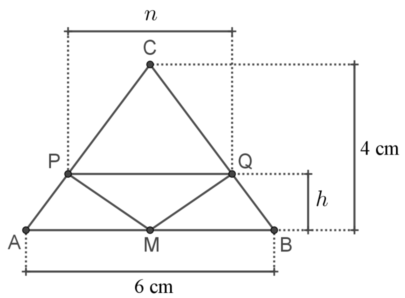
(C) 3

(D) 4

(E) 6

Solução
Resposta: C

Seja ABC um triângulo isósceles de base 6 cm e altura 4 cm. Seja ainda o triângulo MPQ, tal PQ é paralelo a AB, M ponto médio de AB e P e Q pertencentes aos lados AC e BC, respectivamente. Seja ainda $\overline{PQ} = n$ e h a altura do triângulo MPQ relativa ao lado PQ, conforme a figura.



Como ABC é semelhante a PQC, já que PQ é paralelo a AB, temos $\frac{n}{6} = \frac{4-h}{4}$, obtendo assim a equação (I), dada por $n = \frac{12-3h}{2}$. Se S é a área do triângulo MPQ, então temos

$$S = n \cdot \frac{h}{2}$$

Substituindo (I) na equação acima obtemos

$$S = \frac{12-3h}{2} \cdot \frac{h}{2}$$
$$S = -\frac{3h^2}{4} + 3h$$

que fornece a área S em função da altura h e é uma função da forma $y = ax^2 + bx + c$, cuja valor máximo é atingido quando $h = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)} = 2$ cm. Substituindo na função quadrática obtida este valor de h encontramos o valor máximo $S = 3$ cm^2 para a área do triângulo MPQ.

---

7. Seja N o menor número inteiro positivo pelo qual se deve multiplicar 2520 para que o resultado seja o quadrado de um número natural. A soma dos algarismos de N é:

(A) 12 (B) 10 (C) 9 (D) 8 (E) 7

Solução
Resposta: E

Temos que $2520 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7$. Para que um número seja um quadrado de um número natural, os expoentes dos números primos da sua expansão em fatores primos devem ser todos pares. Desta forma, o menor número que devemos multiplicar por 2520 para obtermos um quadrado de um número natural é $N = 2 \times 5 \times 7 = 70$, cuja soma dos algarismos é 7.

8. Sendo n um número inteiro positivo, podemos dizer que o número de soluções reais distintas da equação $x^{2n} - x^n - 2 = 0$ é

(A) 1, se n for par, 2 se n for ímpar.

(B) 2, independentemente de n ser par ou ímpar.

(C) 4 se n for par, 2 se n for ímpar.

(D) 4, independentemente de n ser par ou ímpar.

(E) $2n$, independentemente de n ser par ou ímpar.

Solução
Resposta: B

Fazendo $x^n = y$ obtemos a equação do segundo grau $y^2 - y - 2 = 0$ que tem raízes -1 e 2.

Analisaremos as equações $x^n = -1$ e $x^n = 2$ em dois casos:

- n ímpar: $x^n = -1$ tem uma solução $x = -1$ e $x^n = 2$ também tem solução única $x = \sqrt[n]{2}$.
- n par: $x^n = -1$ não tem solução $x = -1$ e $x^n = 2$ tem duas soluções $x = -\sqrt[n]{2}$ e $x = \sqrt[n]{2}$.

Portanto, independente da paridade de n a equação $x^{2n} - x^n - 2 = 0$ tem duas soluções reais.

---

9. No lançamento de uma moeda viciada a probabilidade de o resultado ser cara equivale a 25% da probabilidade de o resultado ser coroa. Qual a probabilidade de que, em 5 lançamentos, o resultado cara ocorra exatamente uma vez?

(A) $0,25 \times 0,75^4$

(B) $0,2 \times 0,8^4$

(C) $5 \times 0,25 \times 0,75^4$

(D) $0,75^4$

(E) $5 \times 0,2 \times 0,8^4$

Solução
Resposta: E

O enunciado nos diz que a probabilidade de o resultado ser cara equivale a 25% da probabilidade de ser coroa, ou seja, se p é a probabilidade de o resultado ser coroa, então $0,25p$ é a probabilidade de o resultado ser cara.

Como cara ou coroa são os únicos resultados possíveis temos que $p + 0,25p = 1,25p = 1$ e, portanto, $p = 0,8$ é a probabilidade de o resultado ser coroa e $1 - 0,8 = 0,2$ é a probabilidade de o resultado ser cara.

A probabilidade de o resultado cara sair em um determinado (e único) lançamento implica que o resultado coroa ocorra nos outros 4, o que ocorre com uma probabilidade $0,2 \times 0,8^4$. Contudo, como o lançamento cujo resultado foi cara não foi especificado, há 5 formas de isso acontecer: no primeiro, segundo, terceiro, quarto ou quinto lançamento. Logo, a probabilidade procurada é $5 \times 0,2 \times 0,8^4$.

10. Uma prova pode ter dois tipos de questão: objetivas e discursivas. A primeira prova formulada possuía 35 questões objetivas, 3 discursivas e duração de 4 horas. A segunda possuía apenas 30 questões objetivas e 3 horas de duração. Os organizadores desse processo seletivo consideram que o tempo máximo que deve ser gasto em questões do mesmo tipo é sempre constante, mesmo em provas diferentes. Se desejassem formular uma terceira prova, com a mesma duração da primeira, mas com o mesmo número de questões objetivas da segunda, esta deveria ter, no máximo, quantas questões discursivas?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 8 (E) 10

Solução
Resposta: C

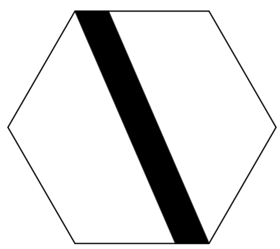
Na segunda prova, há 30 questões objetivas que devem ser resolvidas em 3 horas, ou seja, 180 minutos. Logo, cada questão objetiva pode exigir, na concepção dos organizadores, até $\frac{180}{30} = 6$ minutos para ser resolvida.

Como a primeira prova tem 35 questões objetivas, estas devem ser resolvidas em até $6 \times 35 = 210$ minutos, restando assim, do tempo total desta prova, que é de 240 minutos, correspondente às 4 horas de prova, apenas $240 - 210 = 30$ minutos. Como esta prova possui 3 questões discursivas, isto significa que cada questão discursiva deve ser resolvida em até $\frac{30}{3} = 10$ minutos, segundo os organizadores.

Como a terceira prova deve possuir 30 questões objetivas (que, assim como na primeira prova, consumirão 3 horas) e duração de 4 horas, então haverá apenas 1 hora, isto é, 60 minutos, disponíveis para as questões discursivas, previstas para serem resolvidas em até 10 minutos cada. Logo, esta prova poderia conter, no máximo, $\frac{60}{10} = 6$ questões discursivas, de modo que pudesse ser resolvida dentro do tempo previsto.

---

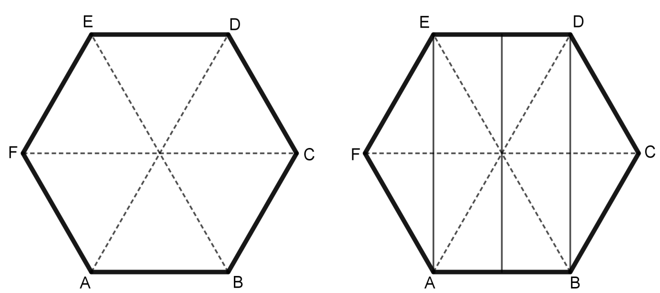
11. Sabendo que o lado menor do paralelogramo preto corresponde a $\frac{1}{4}$ do comprimento do lado do hexágono regular da figura abaixo, então sua área equivale a que fração da área do hexágono?



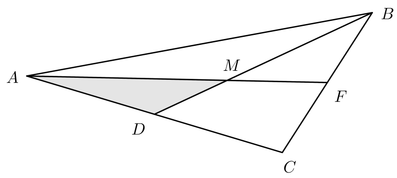
(A) $\frac{1}{16}$ (B) $\frac{1}{9}$ (C) $\frac{1}{8}$ (D) $\frac{1}{6}$ (E) $\frac{1}{4}$

Solução
Resposta: D

Ao traçar as diagonais de um hexágono ABCDEF que passam por seu centro este fica dividido em 6 triângulos equiláteros congruentes. Traçando as diagonais AE e BD e o segmento que une os pontos médios dos lados AB e DE esses seis triângulos equiláteros são divididos ao meio, formando 12 triângulos retângulos congruentes. Como o retângulo ABDE é formado por 8 destes 12 triângulos, sua área corresponde a $\frac{2}{3}$ da área do hexágono. Como o paralelogramo preto tem um quarto da base do retângulo ABDE e a mesma altura que este, sua área será igual a $\frac{1}{4}$ da área deste retângulo e, portanto, correponderá a $\frac{1}{6}$ da área do hexágono.



12. Na figura abaixo, o ponto M é a interseção das medianas BD e AF. Se a área do triângulo ABC é igual a 1, a área do triângulo ADM é:



(A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{2}$ (E) $\frac{1}{3}$

Solução
Resposta: A

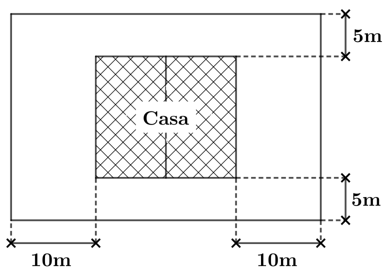
Seja E o ponto médio de AB. Assim, AF, BD e CE dividem o triângulo ABC em seis triângulos, a saber, EMA, AMD, DMC CMF, FMB e BEM, cujas áreas são a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 e a_6, respectivamente. Como D, E e F são pontos médios, temos: Área(ACE) $=$ Área(BEC); Área(ABD) $=$ Área(CBD) e Área(AFC) $=$ Área(AFB). Reescrevendo essas equações com as variáveis a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 e a_6, temos:

$$a_1 + a_2 + a_3 = a_4 + a_5 + a_6$$
$$a_2 + a_3 + a_4 = a_1 + a_5 + a_6$$
$$a_3 + a_4 + a_5 = a_1 + a_2 + a_6$$

de onde concluímos que $a_1 = a_4$, $a_2 = a_5$ e $a_3 = a_6$. Usando o fato de que os triângulos cujas bases estão contidas em um mesmo lado de ABC possuem áreas iguais, temos então $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6$. Logo, a área do triângulo $AMD = 1/6$.

---

13. Em um terreno retangular de 1360 m^2 de área será construída uma casa térrea de 480 m^2, conforme as indicações da figura. Nessas condições, um valor possível para as dimensões desse terreno será:



(A) 85 m $\times$ 16 m

(B) 80 m $\times$ 17 m

(C) 68 m $\times$ 10 m

(D) 40 m $\times$ 34 m

(E) 34 m $\times$ 20 m

Solução
Resposta: D

Consideremos que a casa tenha x metros de comprimento por y metros de largura e, em consequência, o comprimento do terreno seja $x + 20$ metros e a sua largura seja $y + 10$ metros.

Assim segue que $xy = 480$ e $(x + 20)(y + 10) = 1360$.

Efetuando o produto da segunda equação e considerando $xy = 480$ obtemos:

$(x+20)(y+10) = 1360 \Leftrightarrow xy + 10x + 20y + 200 = 1360 \Leftrightarrow 480 + 10x + 20y + 200 = 1360 \Leftrightarrow 10x + 20y = 680 \Leftrightarrow x = 68 - 2y$.

Substituindo $x = 68 - 2y$ na equação $xy = 480$ temos que

$$xy = 480 \Rightarrow (68 - 2y)y = 480 \Rightarrow 68y - 2y^2 = 480 \Rightarrow 2y^2 - 68y + 480 = 0 \Rightarrow y^2 - 34y + 240 = 0.$$

Resolvendo a equação encontramos as soluções $y = 10$ e $y = 24$.

Para $y = 10$ temos $x = 48$ e o terreno terá dimensões 68 m $\times$ 20 m.

Para $y = 24$ temos $x = 20$ e o terreno terá dimensões 40 m $\times$ 34 m.

14. Uma esfera de raio R está inscrita em um cone circular reto de altura h e raio da base r. Sabendo-se que $\frac{h}{R} = 4$, o valor de $\frac{r}{R}$ é

(A) $4\sqrt{2}$

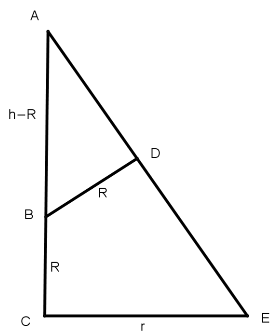
(B) 4

(C) $2\sqrt{2}$

(D) 2

(E) $\sqrt{2}$

Solução
Resposta: E



Na figura, B é o centro da esfera, C o centro da base do cone, AE uma geratriz e D o ponto de tangência.

Pela semelhança dos triângulos ACE e ABD temos que $\frac{r}{R} = \frac{\sqrt{h^2 + r^2}}{h - R}$.

Como $h = 4R$, obtemos $\frac{r}{R} = \frac{\sqrt{h^2 + r^2}}{3R}$, $9r^2 = 16R^2 + r^2$, donde $\frac{r}{R} = \sqrt{2}$.

---

15. A equação $x + 2 = \sqrt{3x + 10}$

(A) tem apenas uma raiz real.

(B) tem um número inteiro positivo e um número inteiro negativo como raízes.

(C) possui duas raízes inteiras positivas.

(D) possui dois números irracionais distintos como raízes.

(E) não tem solução real.

Solução
Resposta: A

Temos que $x + 2 = \sqrt{3x + 10} \Rightarrow (x + 2)^2 = (\sqrt{3x + 10})^2 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = 3x + 10 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0$.

A equação $x^2 + x - 6 = 0$ tem duas soluções $x = 2$ e $x = -3$. Testando na equação original temos que:

• $x = 2$ satisfaz a equação, pois $2 + 2 = 4 = \sqrt{16} = \sqrt{3 \cdot 2 + 10}$.

• $x = -3$ não satisfaz a equação, pois $-3 + 2 = -1 \neq 1 = \sqrt{1} = \sqrt{3 \cdot (-3) + 10}$.

Portanto a equação possui uma raiz real $x = 2$.

16. Qual taxa de juros compostos semestral equivale à taxa anual de $i\%$?

(A) $\left(10\sqrt{100+i}-100\right)\%$

(B) $\left(\dfrac{\sqrt{100+i}-10}{10}\right)\%$

(C) $\left(\sqrt{1+i}-1\right)\%$

(D) $\sqrt{i}\,\%$

(E) $\dfrac{i}{2}\%$

Solução
Resposta: A

Denotamos a taxa de juros semestral por s. Assim, $(1+s)^2 = 1+\dfrac{i}{100} \Leftrightarrow 1+s = \sqrt{1+\dfrac{i}{100}}$.

Portanto $s = \sqrt{1+\dfrac{i}{100}} - 1 = \dfrac{\sqrt{100+i}-10}{10} = \dfrac{10\sqrt{100+i}-100}{100} = \left(10\sqrt{100+i}-100\right)\%$.

---

17. Quais alterações no preço de um produto resultam em um maior preço final?

(A) Um aumento de 20% seguido de uma redução de 10%.

(B) Um aumento único de 10%.

(C) Um aumento de 30% seguido de uma redução de 20%.

(D) Uma redução de 30% seguido de um aumento de 40%.

(E) Dois aumentos consecutivos de 5%.

Solução
Resposta: E

Podemos supor que o preço inicial do produto seja 100 unidades monetárias. Calculemos o resultado obtido ao final em cada um dos itens:

(A) $100 \cdot 1,2 \cdot 0,9 = 108$.
(B) $100 \cdot 1,1 = 110$.
(C) $100 \cdot 1,3 \cdot 0,2 = 104$.
(D) $100 \cdot 0,7 \cdot 1,4 = 98$.
(E) $100 \cdot 1,05 \cdot 1,05 = 110,25$.

Portanto dois aumentos sucessivos de 5% resultam no maior valor final.

---

18. Sobre a equação $\dfrac{1}{x^2-9} + \dfrac{3}{x+3} = \dfrac{1}{6(x-3)}$, podemos afirmar que

(A) não possui soluções reais.

(B) possui uma única solução real, que é positiva.

(C) possui uma única solução real, que é negativa.

(D) possui duas soluções reais distintas, com sinais contrários.

(E) possui duas soluções reais distintas, com mesmo sinal.

Solução
Resposta: A

Note que x deve ser diferente de -3 e 3, pois estes valores anulam denominadores da equação.

Multiplicando ambos os lados da equação por $6(x^2-9) = 6(x+3)(x-3)$ obtemos $6 + 18(x-3) = x+3$.

Assim segue que $6 + 18x - 54 = x + 3$, ou seja, $x = 3$. Mas x não pode ser igual a 3 e assim a equação não possui solução.

19. Qual das opções abaixo é igual ao número $\dfrac{\sqrt{8-4\sqrt{3}}}{-1+\sqrt{3}}$?

(A) $-\sqrt{2}$

(B) -1

(C) 1

(D) $\sqrt{2}$

(E) 2

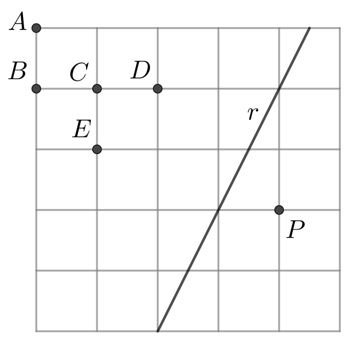
Solução
Resposta: D

Seja $t = \dfrac{\sqrt{8-4\sqrt{3}}}{-1+\sqrt{3}}$. Então $t^2 = \dfrac{(\sqrt{8-4\sqrt{3}})^2}{(-1+\sqrt{3})^2} = \dfrac{8-4\sqrt{3}}{1-2\sqrt{3}+3} = \dfrac{4(2-\sqrt{3})}{2(2-\sqrt{3})} = 2.$

Como $t > 0$ segue que $t = \sqrt{2}$.

---

20. A reta r no reticulado de quadrados iguais (figura abaixo) é perpendicular ao segmento que une P ao ponto:



(A) A.

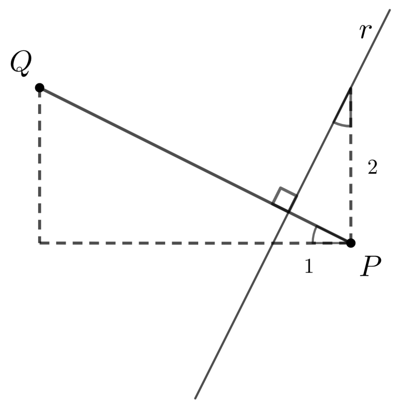
(B) B.

(C) C.

(D) D.

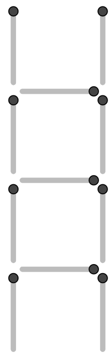
(E) E.

Solução
Resposta: B



Seja Q um ponto tal que o segmento PQ seja perpendicular à reta r. O ângulo que PQ faz com a horizontal é igual ao ângulo que r faz com a vertical (vertical e horizontal são perpendiculares entre si). Nesse caso, no triângulo retângulo que tem PQ como hipotenusa o cateto horizontal deve ter o dobro do cateto vertical. O único ponto que tem essa propriedade é o ponto B.

21. A figura abaixo mostra uma "escada" de 3 degraus, feita a partir de 11 palitos de fósforo. Qual das expressões abaixo apresenta corretamente o número de palitos de fósforo necessários para fazer uma escada semelhante a esta e que tenha n degraus?



(A) $3n$

(B) $3n+2$

(C) $3n+11$

(D) $4n-1$

(E) $5n-4$

Solução
Resposta: B

Imagine que para construir a escada você inicialmente posicionou os 2 palitos verticais da parte inferior, cuja figura aparece no enunciado. Como cada degrau é formado por 3 palitos na forma de U, ao acrescentar n degraus estamos, na verdade, acrescentando $3n$ palitos, que somados aos dois primeiros totalizam $3n+2$ palitos.

---

22. Carlos e Victor estão correndo em uma pista circular. Ambos largam no mesmo momento, partindo do mesmo ponto da pista e no mesmo sentido e mantêm, cada um, sua velocidade constante. Carlos e Victor completam cada volta, respectivamente, em 204 e 210 segundos. Depois de dar quantas voltas, contadas a partir da largada, Carlos estará exatamente uma volta à frente de Victor.

(A) 210 (B) 204 (C) 70 (D) 36 (E) 35

Solução
Resposta: E

Se ℓ é o comprimento da pista, então quando Carlos tiver completado a primeira volta, Victor terá percorrido a distância $\dfrac{204}{210}\ell$. e, neste instante, a distancia entre eles será igual a $\ell - \dfrac{204}{210}\ell = \dfrac{\ell}{35}$.

Portanto, a distância entre eles será igual a ℓ no instante em que Carlos completar 35 voltas.

---

23. Um professor escreve quatro números inteiros consecutivos no quadro e em seguida apaga um deles. A soma dos três números restantes é igual 67. O número que foi apagado é

(A) 17 (B 20 (C) 23 (D] 29 (E) 31

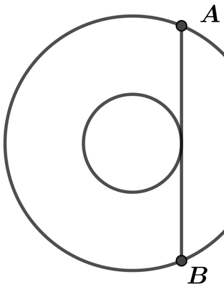
Solução
Resposta: C

Considere os quatro números inteiros consecutivos $n, n+1, n+2, n+3$. E suponha que o professor apagou o número $n+k$ em que k é algum número do conjunto $\{0,1,2,3\}$.

A soma dos três restantes é então $4n+6-(n+k)=67$. Ou seja, $3n=61+k$, donde concluímos que $k=2$.

Então $3n=63 \iff n=21$ e o número apagado foi 23.

24. Os dois círculos da figura abaixo são concêntricos e AB é uma corda do círculo de maior raio e tangente ao círculo de menor raio. Se o raio do círculo maior é 13cm e $\overline{AB} = 24$cm, o raio do círculo menor, em centímetros, é



(A) 3

(B) 5

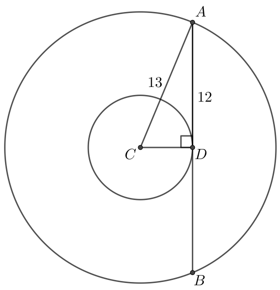
(C) 8

(D) 10

(E) 12

Solução
Resposta: B

Se C é o centro dos círculos concêntricos e D o ponto de tangência, então o triângulo ACD é reto em D. Como D também é ponto médio de AB, então AD mede 12cm. Quanto à hipotenusa, como é raio do círculo maior, mede 13cm. Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo ACD, temos $13^2 = \overline{CD}^2 + 12^2$, o que nos leva a conclusão de que o raio do círculo menor mede 5cm.



---

25. Quantos números inteiros positivos n satisfazem a inequação $\dfrac{n^2+206}{n} < 105$?

(A) 99 (B) 100 (C) 101 (D) 102 (E) 103

Solução
Resposta: B

Sendo $n > 0$, tem-se que $\dfrac{n^2+206}{n} < 105$ equivale a inequação $n^2 + 206 < 105n$.

Como $n^2 + 206 < 105n \iff n^2 - 105n + 206 < 0 \iff (n-2)(n-103) < 0$ concluímos que $2 < n < 103$.

Portanto, o conjunto solução é $S = \{3, 4, \ldots, 102\}$ que tem 100 elementos.

26. Dois terrenos quadrados precisam ser cercados. Sabendo que um dos terrenos tem exatamente o dobro da área do outro, é correto afirmar que a quantidade de cerca usada para cercar o terreno menor é

(A) menos do que a metade da quantidade usada para o terreno maior.

(B) exatamente a metade da quantidade usada para o terreno maior.

(C) igual à quantidade usada para o terreno maior.

(D) aproximadamente 70% da quantidade usada para o terreno maior.

(E) aproximadamente 40% a mais do que a quantidade usada para o terreno maior.

Solução
Resposta: D

Digamos que o lado do terreno menor mede a e o lado do maior mede b. Então $b^2 = 2a^2$ e assim $b = a\sqrt{2}$.

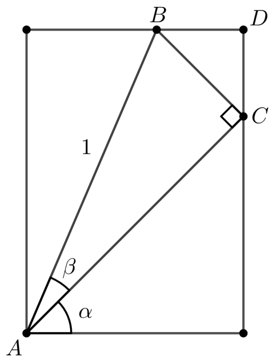
O terreno menor tem perímetro $4a$ e o maior tem perímetro $4b$.

Logo $\dfrac{4b}{4a} = \dfrac{4a\sqrt{2}}{4a} = \sqrt{2} \approx 1{,}4$ e $\dfrac{4a}{4b} = \dfrac{4a}{4a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}7$.

Portanto, para cercar o terreno maior precisamos de aproximadamente 40% a mais de cerca que a quantidade usada para o terreno menor e para cercar o terreno menor necessitamos aproximadamente 70% da quantidade usada para o terreno maior.

---

27. No retângulo abaixo, inscreve-se um triângulo retângulo ABC cuja hipotenusa mede 1. É correto afirmar que, em função dos ângulos α e β, a medida do segmento CD é:



(A) $\operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$.

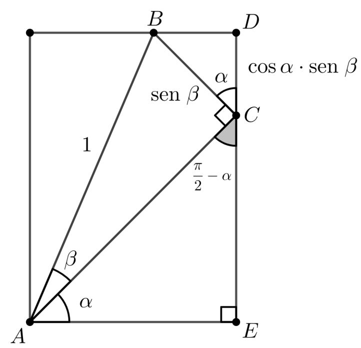
(B) $\operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta$.

(C) $\cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta$.

(D) $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$.

(E) $\cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$.

Solução
Resposta: E



O cateto BC é oposto ao ângulo β, logo ele mede $\overline{BC} = \operatorname{sen}\beta$. O ângulo $A\hat{C}E = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$, logo $B\hat{C}D = \alpha$.

Assim temos BCD é um triângulo retângulo de hipotenusa $\overline{BC} = \operatorname{sen}\beta$. Como CD é cateto adjacente a α, temos $\overline{CD} = \cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$

28. Sabe-se que a altura média de um grupo de 50 candidatos a um exame militar é 1,76m e que os candidatos mais baixo e mais alto medem, respectivamente 1,63m e 1,93m. É correto afirmar que

(A) Há pelo menos um candidato que mede exatamente 1,76m.

(B) A diferença entre o primeiro e o terceiro quartis é maior que 1.

(C) A mediana é igual à moda.

(D) Há pelo menos três candidatos com alturas diferentes.

(E) Mais da metade dos candidatos têm altura menor que a média.

Solução
Resposta: D

Se houvesse apenas duas alturas distintas essas deveriam ser 1,63m e 1,93m. Mas isso implicaria que haveria a candidatos com altura 1,63m e b candidatos com altura 1,93m, sendo $a + b = 50$.

$$\begin{aligned} \frac{1,63a + 1,93b}{a+b} = 1,76 \quad &\iff \quad 1,63a + 1,93b = 1,76(a+b) \\ &\iff \quad (1,93 - 1,76)b = (1,76 - 1,63)a \\ &\iff \quad 0,17b = 0,13a \iff 17b = 13a. \end{aligned}$$

Assim segue que $13 \cdot 50 = 13(a+b) = 13a + 13b = 17a + 13b = 30b \iff b = \frac{13 \cdot 5}{3}$, o que é impossível pois b deve ser inteiro.

---

29. Para medir a altura de um edifício vertical, um engenheiro instalou um teodolito a uma altura de 1,70 m do solo, observando seu topo sob um ângulo de 43º, a partir da horizontal que passa pelo teodolito. Sabendo que o edifício e o teodolito encontram-se em um mesmo terreno plano, e que o teodolito foi instalado a uma distância de 80 m do edifício, determine a medida da altura do edifício, em metros, calculada pelo engenheiro.
Considere: sen 43º = 0,682; cos 43º = 0,731; tg 43º = 0,933.

(A) 69,92

(B) 76,34

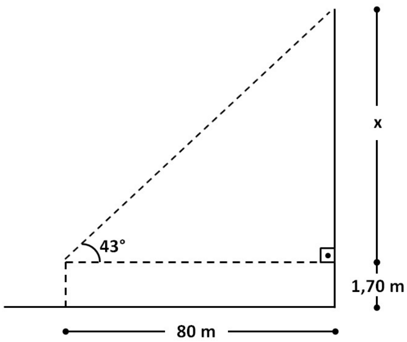
(C) 84,8

(D) 93,3

(E) 95

Solução
Resposta: B

Observemos a figura abaixo, que ilustra a situação descrita:



Para calcular a altura do edifício é necessário encontrar a medida x. Aplicando a razão trigonométrica tangente ao triângulo retângulo formado obteremos:

$$\tan\ 43^o = \frac{x}{80} \Rightarrow 0,933 = \frac{x}{80} \Rightarrow x = 80 \times 0,933 \Rightarrow x = 74,64 \text{ m}.$$

Somando-se, à medida encontrada, a medida de 1,70 m, correspondente à altura em relação ao solo que o teodolito foi instalado, encontraremos a altura do edifício, calculada pelo engenheiro:

$$\text{Altura} = 74,64 + 1,70 = 76,34 \text{ m}.$$

30. Ao lançar um dado duas vezes, qual a probabilidade da soma dos resultados obtidos ser um número primo?

(A) $\frac{5}{12}$

(B) $\frac{7}{18}$

(C) $\frac{1}{3}$

(D) $\frac{4}{9}$

(E) $\frac{13}{36}$

Solução
Resposta: A

O espaço amostral consiste em todos os pares (m, n), onde $m, n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \} = I_6$.

O número de casos possíveis no lançamento de dois dados é igual a 36.

Agora consideremos o conjunto $A = \{m, n \in\ I_6 : m + n \text{ é primo}\}$.

Logo $A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 1), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 3), (5, 2), (5, 6), (6, 1), (6, 5)\}$.

Como A possui 15 elementos, segue que a probabilidade do resultado da soma ser um número primo é igual a $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$.